С.К. Водопьянов, Д.В. Исангулова

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет,
vodopis@math.nsc.ru, dasha@math.nsc.ru

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ТИПА СОБОЛЕВА НА ОБЛАСТЯХ ДЖОНА ГРУПП КАРНО

Рассматриваются конечномерные группы Ли со стратифицированной нильпотентной алгеброй Ли (группы Карно) с субримановой метрикой (метрикой Карно – Каратеодори). На областях Джона общих групп Карно доказаны теоремы вложения типа Соболева: в пространство интегрируемых функций, в пространство непрерывных функций, в пространство Гёльдеровых функций и в пространства Орлича. Оценивается норма оператора вложения в зависимости от геометрии области. Исследована компактность оператора вложения.

Ф. Джон при изучении устойчивости изометрий ввел области с ограниченными внутренним и внешним радиусами (области Джона) на евклидовом пространстве [4]. Области Джона можно рассматривать как естественное обобщение класса липшицевых областей и областей, удовлетворяющих условию конуса.

В евклидовом пространстве теоремы вложения на областях Джона установил Ю.Г. Решетняк [7]. Вложение в пространства Орлича доказаны С.И. Похожаевым [6] для ограниченных областей с локально липшицевыми границами и Б.В. Трушиным [9] для более широкого класса областей, чем области Джона.

На группах Карно глобальные теоремы вложения могут быть найдены в работе [1]. Теоремы вложения на областях Джона при $l = 1$ установлены в [3].

Группа Карно $\mathbb{G}$ — это связная односвязная нильпотентная группа Ли с алгеброй Ли $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$, где $[V_1, V_i] = V_{i+1}$, $i = 1, \ldots, m-1$, $[V_1, V_m] = \{0\}$, $\dim V_1 = n$. Пусть левоинвариантные векторные поля $X_1, \ldots, X_N$ образуют базис алгебры Ли V так, что $X_{\dim V_1 + \cdots + \dim V_{i-1}+1}, \ldots, X_{\dim V_1 + \cdots + \dim V_i}$ — базис V_i. Введем координаты первого рода: $x=(x_1, \ldots, x_N) = \exp\Big(\sum_{i=1}^N x_i X_i\Big)(e)$, где e — единица группы. Мера Лебега на $\mathbb{R}^N$ является биинвариантной мерой Хаара на $\mathbb{G}$.

Метрика Карно – Каратеодори d_{cc} определяется как инфимум длин горизонтальных кривых, соединяющих две точки (кусочно-гладкая кривая γ называется горизонтальной, если $\dot\gamma(t) \in V_1(\gamma(t))$ для почти всех t). Размерность Хаусдорфа относительно метрики Карно – Каратеодори равна $\nu = \sum_{i=1}^m (i \dim V_i)$.

Область Ω в $\mathbb{G}$ называется областью Джона $J(\alpha, \beta)$, если существует выделенная точка $x_0 \in \Omega$, такая, что всякая точка $x \in \Omega$ может быть соединена с x_0 кривой $\gamma\colon [0, l] \to \Omega$, $l \leqslant \beta$, параметризованной длиной дуги, так, что $\gamma(0) = x$, $\gamma(l) = x_0$, $\operatorname{dist}(\gamma(s), \partial\Omega) \geqslant \alpha s/l$ для всех $s \in [0, l]$. Для формулировки теорем вложения определим следующие функциональные пространства на Ω.

1) Пространство Соболева $W_q^l(\Omega, \mathbb{R})$, $l \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, состоит из измеримых функций $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, имеющих обобщенные производные $X^{I_h} f$ при $d(I_h) \leqslant l$ и конечную норму

$$\|f\|_{W_p^l(\Omega,\mathbb{R})} = \|f\|_{p,\Omega} + \sum_{0<d(I_h)\leqslant l} \|X^{I_h} f\|_{p,\Omega},$$

где $\|\cdot\|_{p,\Omega}$ — L_p-норма измеримой функции на Ω, $X^{I_h}=X_{i_1} \cdots X_{i_k}$ — дифференциальный оператор, задаваемый мультииндексом $I_h = (i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, n\}^k$ с весом $d(I) = k$.

2) C^k-гладкие функции. Функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ принадлежит классу $C^k(\Omega)$, $k = 0, 1, \dots$, если f непрерывна вместе со всеми своими производными $X^{I_h} f$ при $d(I_h) \leqslant k$, и конечна норма $\|f\|_{C^k(\Omega)} = \sup\{|X^{I_h} f(x)|\colon x \in \Omega, d(I_h) \leqslant k\}$.

3) Функции с производными, непрерывными по Гёльдеру. Определим сперва внутреннюю метрику d_τ^Ω, $0 < \tau \leqslant 1$:

$$d_\tau^\Omega(x, y) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{j} \big(d_{cc}(x_i, x_{i-1})\big)^\tau \mid x = x_0, x_1, \dots, x_j = y \in \Omega,\right.$$
$$\left. d_{cc}(x_i, x_{i-1}) \leqslant \max\{\operatorname{dist}(x_i, \partial\Omega), \operatorname{dist}(x_{i-1}, \partial\Omega)\},\ i = 1, \dots, j \right\}.$$

Если Ω — область Джона, то она ограничена в метрике d_τ^Ω для всех $\tau \in (0, 1]$.

Пространство $C^{k,\tau}(\Omega)$, $k = 0, 1, \dots$, $0 < \tau < 1$, состоит из C^k-гладких функций $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ с конечной нормой

$$\|f\|_{C^{k,\tau}(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega,\ d(I_h) \leqslant k} |X^{I_h} f(x)| + \sup_{x, y \in \Omega,\, x \neq y,\, d(I_h) = k} \frac{|X^{I_h} f(x) - X^{I_h} f(y)|}{d_\tau^\Omega(x, y)}.$$

4) Класс функций $C^{k,1}_{\text{loc}}(\Omega)$ — это подмножество C^k-гладких функций с конечной нормой

$$\|f\|_{C^{k,1}_{\text{loc}}(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega,\, d(I_h) \leqslant k} |X^{I_h} f(x)| + \sup_{\substack{B(x,r) \subset \Omega,\, d_{cc}(e,h) = r, \\ d(I_h) = k}} \frac{|X^{I_h} f(xh) + X^{I_h} f(xh^{-1}) - 2X^{I_h} f(x)|}{r}.$$

5) Функции с обобщенными производными класса Орлича. Пусть $\Phi(t) = \exp(t^\eta) - 1$, $\eta \geqslant 1$. Обозначим через

$C^{k,\Phi}(\Omega)$ пространство функций $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, имеющих непрерывные производные $X^{I_h}f$ при $d(I_h) < k$ и обобщенные производные $X^{I_h}f$ при $d(I_h) = k$, удовлетворяющие следующему условию:

$$\int\limits_{\Omega} \Phi\bigl(|X^{I_h}f(x)|\bigr)\,dx < \infty.$$

Норма в пространстве $C^{k,\Phi}(\Omega)$ задается как

$$\|f\|_{C^{k,\Phi}(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega,\ d(I_h)<k} |X^{I_h}f(x)| +$$
$$+ \inf\left\{\rho > 0 \mid \int\limits_{\Omega} \Phi\left(\frac{|X^{I_h}f(x)|}{\rho}\right) dx \leqslant 1,\ d(I_h) = k\right\}.$$

Очевидно, что $C^{0,\Phi}$ совпадает с пространством Орлича L_Φ.

Теорема 1 (теорема вложения). *Пусть $l \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}^+$, $k < l$, $1 \leqslant p < \infty$ и Ω — область Джона $J(\alpha,\beta)$ на $\mathbb{G}$.*

(1) *Если $(l-k)p < \nu$, то $W_p^l(\Omega)$ непрерывно вкладывается в $W_q^k(\Omega)$ при $1 \leqslant q \leqslant \nu p/(\nu-(l-k)p)$ (здесь $W_q^0 = L_q$). Норма оператора вложения удовлетворяет следующему соотношению:*

$$\|i\| \leqslant C\Bigl(\beta/\alpha\Bigr)^{l-1-k+\nu} (\operatorname{diam}\Omega)^{-\nu/p+\nu/q} \max\{(\operatorname{diam}\Omega)^{l-k}, 1\}.$$

Если $q < \nu p/(\nu-(l-k)p)$, то вложение вполне непрерывно.

(2) *Если $(l-k)p = \nu$ и $p > 1$, то $W_p^l(\Omega)$ непрерывно вкладывается в $C^{k,\Phi}(\Omega)$ с $\Phi(t) = \exp(t^\eta) - 1$, $\eta \leqslant p/(p-1)$. Если $\eta < p/(p-1)$, то вложение вполне непрерывно.*

(3) *Если $p = 1$ и $l-k = \nu$, то $W_p^l(\Omega)$ вполне непрерывно вкладывается в $C^{k,\Phi}(\Omega)$ для всех $\eta \in [1,\infty)$ и непрерывно вкладывается в $C^k(\Omega)$.*

(4) *Если $(l-k)p > \nu$ и $(l-k-1)p < \nu$, то $W_p^l(\Omega)$ вполне непрерывно вкладывается в $C^k(\Omega)$ и непрерывно вкладывает-*

ся в $C^{k,\tau}(\Omega)$, $0 < \tau \leqslant l - k - \nu/p < 1$. *Если* $\tau < l - k - \nu/p$, *то вложение в* $C^{k,\tau}(\Omega)$ *вполне непрерывно.*

(5) *Если* $(l-k)p > \nu$ *и* $(l-k-1)p = \nu$, *то* $W_p^l(\Omega)$ *вполне непрерывно вкладывается в* $C^k(\Omega)$ *и* $C^{k,\tau}(\Omega)$ *при всех* $\tau \in (0,1)$ *и непрерывно вкладывается в* $C^{k,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

В пунктах (2) – (5) *нормы операторов вложения удовлетворяют следующему соотношению:*

$$\|i\| \leqslant C \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{l-1-k+\nu+\nu/p} (\operatorname{diam}\Omega)^{-\nu/p} \max\{(\operatorname{diam}\Omega)^{l-k}, 1\}.$$

Доказательство теорем вложения основано на специальном интегральном представлении дифференцируемых функций на группах Карно, теоремах вложения для потенциалов Рисса [2, 10] и теореме типа Зигмунда – Кальдерона. Далее остается еще один шаг — переход от локальных оценок к областям Джона. При этом необходимо оценивать зависимость от параметров области Джона.

Для формулировки интегрального представления нам понадобится еще одно понятие. Определим квазиметрику, эквивалентную метрике d_{cc}: $d_\infty(x,y) = \sup\limits_{i=1,\dots,N} \{|(x^{-1}y)_i|^{1/\deg X_i}\}$, где $\deg X_i = \{k \mid X_i \in V_k\}$ — степень векторного поля X_i, см. [5]. Обозначим через $\operatorname{Box}(a,r) = \{x : d_\infty(a,x) < r\}$ шар в квазиметрике d_∞.

Теорема 2 (интегральное представление). *Пусть* $l > 0$ *и функция* $u \in C^\infty(\mathbb{G})$. *Тогда*

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{G}} u(y)\varphi(y^{-1}x)\,dy + \sum_{d(I_h)=l} \int\limits_{\mathbb{G}} X^{I_h}u(y)K_{I_h}(y^{-1}x)\,dy \qquad (1)$$

для всех $x \in \mathbb{G}$, *где*

$$\varphi \in C^\infty(\mathbb{G}), \quad \operatorname{supp}\varphi \subseteq \overline{\operatorname{Box}(e,1)} \setminus \operatorname{Box}(e,1/2),$$

$$\int\limits_{\mathrm{Box}(e,1)} \varphi(x)\,dx = 1, \quad \int\limits_{\mathrm{Box}(e,1)} x^\alpha \varphi(x)\,dx = 0,\ 0 < |\alpha| < l,$$

$$K_{I_h} \in C^\infty(\mathbb{G} \setminus \{e\}), \quad \mathrm{supp} K_{I_h} \subseteq \overline{\mathrm{Box}(e,1)},$$

$$|X^{J_h} K_{I_h}(x)| \leqslant M_{d(J_h)} d_\infty(x,e)^{-l+d(J_h)+\nu} \quad \text{для всякого } J_h.$$

Перепишем формулу (1) в $\mathbb{R}^n$:

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(y)\varphi(x-y)\,dy + \sum_{|\alpha|=l} \int\limits_{\mathbb{R}^n} D^\alpha u(y) K_\alpha(x-y)\,dy.$$

Отметим, что данное интегральное представление является новым и в евклидовом случае, поскольку ядро интегрального оператора в (1) зависит только от $x-y$, а не от $(x, y-x)$, см. [8].

Доказательство интегрального представления основано на представлении функций с помощью свертки с ядром, которое есть сумма двоичных растяжений. Данный метод может быть рассмотрен как часть воспроизводящей формулы Кальдерона.

Доказательство сформулированных результатов приведено в работе [11].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00531) и программы Президента “Ведущие научные школы РФ” (проект НШ-6613.2010.1).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Folland G.B. *Lipschitz classes and Poisson integrals on stratified groups* // Stud. Math. - 1979. - V. 66. - P. 37-55.

2. Franchi B.,Gutiérrez C.E. , Wheeden R.L. *Weighted Sobolev – Poincaré inequalities for Grushin type operators* // Commun. Partial Differ. Equations. - 1994. - V. 19. - No 3-4. - P. 523-604.

3. Garofalo N., Nhieu D.-M. *Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot – Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces* // Commun. Pure Appl. Math. – 1996. – V. 49. – No 10. – P. 1081-1144.

4. John F. *Rotation and strain* // Comm. Pure Appl. Math. – 1961. – V. 14. – P. 391-413.

5. Nagel A., Stein E.M., Wainger S. *Balls and metrics defined by vector fields. I: Basic properties* // Acta Math. – 1985. – V. 155. – P. 103-147.

6. Pohozhaev S.I. *On Sobolev embedding theorem in the case* $lp = n$ // Proc. of the Scientific and Technical Conference, Moscow Power Engineering Institute, 1965. – P. 158-170.

7. Reshetnyak Yu.G. *Some integral representations of differentiable functions* // Sib. Mat. Zh. – 1971. – V. 12. – P. 420-432.

8. Sobolev S.L. *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics. 3rd ed.* – Translations of Mathematical Translations of Mathematical Monographs, 90. Providence, RI: AMS. 1991. – 286 p.

9. Trushin B.V. *Embedding of Sobolev space in Orlicz space for a domain with irregular boundary* // Math. Notes. – 2006. – V. 79. – No 5. – P. 707-718 [English translation from: Mat. Zametki. – 2006. – V. 79. – No 5. – P. 767-778].

10. Vodopyanov S.K. *Weighted L_p-potential theory on homogeneous groups* // Sib. Math. J. – 1992. – V. 33. – No 2. – P. 201-218 [English translation from: Sib. Mat. Zh. 33, no. 2 (1992), 29–48].

11. Vodopyanov S.K., Isangulova D.V. *Coercive estimates and integral representation formulas on Carnot groups* // Eurasian Math. J. – 2010. – V. 1. – No 3.